ĐỀ THI OLYMPIC CÁC TRƯỜNG THPT TÂY NAM NĂM HỌC 2017 - 2018

Môn: Toán – Lớp 10

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1*(5 điểm):* Giải phương trình, bất phương trình.

a. $\sqrt{x^2-4x+5} \ge 3-2x.$

b. $\sqrt[3]{2-x} = 1-\sqrt{x-1}$

Câu 2*(5 điểm):* Cho $f(x) = 2x^2+6mx+17m^2-8$ (m là tham số) có đồ thị là (P_m).

a. Tìm m để $f(x) \ge 0$ với mọi x thuộc tập xác định.

b. Khi (P_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ là $x_1; x_2$, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3(x_1+x_2)+x_1x_2+5$.

Câu 3*(3 điểm):* Cho tam giác ABC có $AB = c; BC = a; AC = b$, G là trọng tâm và diện tích là S. Chứng minh rằng: $cot\,\widehat{AGB} + cot\,\widehat{AGC} + cot\,\widehat{BGC} = \dfrac{-(a^2+b^2+c^2)}{4S}$

Câu 4*(3 điểm):* Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $B \in \Delta: 2x-y=0.$ Điểm $M(-3;0)$ là trung điểm của AD, điểm $K(-2;-2)$ thuộc cạnh DC sao cho $KC = 3KD$.

Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D của hình vuông.

Câu 5*(2 điểm):* Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y^2+1-x)+y(2x-y-1) = x^2y \\ y^2-3x-4 = \sqrt{x-1}(x^2-4y-2). \end{cases}$

Câu 6*(2 điểm):* Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \le 9$.

Chứng minh rằng $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+xz+x^2} \ge \sqrt{3}.$

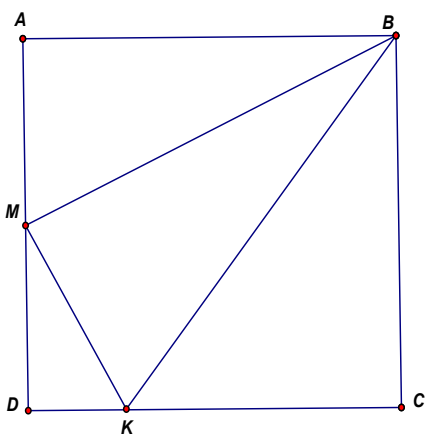
Hết

ĐỀ THI OLYMPIC CÁC TRƯỜNG THPT TÂY NAM NĂM HỌC 2017 - 2018

Môn: Toán – Lớp 10

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1 **(5,0 điểm)**	**a**	**3,0 điểm** $\sqrt{x^2-4x+5}\ge 3-2x$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3-2x<0\\ x^2-4x+5\ge 0\end{cases} \quad (I)\\ \begin{cases}3-2x\ge 0\\ x^2-4x+5\ge (3-2x)^2\end{cases} (II)\end{array}\right.$	1,5
		$(I)\Leftrightarrow x>\dfrac{3}{2}.$ $(II)\Leftrightarrow \begin{cases}x\le \dfrac{3}{2}\\ 3x^2-8x++4\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le \dfrac{3}{2}\\ \dfrac{2}{3}\le x\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}\le x\le \dfrac{3}{2}.$ Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right).$	0,5
	b	**2,0 điểm**	
		$\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$ TXĐ: $D=[1;+\infty)$ Đặt $a=\sqrt{x-1};b=\sqrt[3]{2-x}\left(a\ge 0;b\in\mathbb{R}\right)$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases}b=1-a\\ a^2+b^3=1\end{cases}$	1,0
		$\Rightarrow (1-a)^3+a^2=1\Leftrightarrow a^3-4a^2+3a=0\Leftrightarrow \left(a^2-4a+3\right)a=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=3\\ a=1\end{array}\right.$ +) $a=0\Rightarrow b=1$ giải $x=1(tm)$ +) $a=3\Rightarrow b=-2$ giải $x=10(tm)$ +) $a=1\Rightarrow b=0$ giải $x=2(tm)$ Vậy nghiệm phương trình là $x=1;x=10;x=2$.	1,0

2 **(5,0 điểm)**	**a**	**2,5 điểm**	
		TXĐ: $\mathbb{R}$. Vì $a = 2 > 0$ nên $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0$ $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 16 - 25m^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{4}{5} \\ m \leq \dfrac{-4}{5} \end{array}\right.$	2,5
	b	**2,5 điểm**	
		$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 6mx + 17m^2 - 8 = 0$ $\Delta = 16 - 25m^2$ (P_m) cắt Ox tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow 16 - 25m^2 \geq 0 \Leftrightarrow m \in \left[\dfrac{-4}{5}; \dfrac{4}{5}\right]$ Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3m \\ x_1x_2 = \dfrac{17m^2 - 8}{2} \end{cases}$ $A = 3(x_1 + x_2) + x_1x_2 + 5 = \dfrac{1}{2}(17m^2 - 18m + 2)$	1,0
		Xét $g(m) = 17m^2 - 18m + 2$ trên $\left[\dfrac{-4}{5}; \dfrac{4}{5}\right]$ Tọa độ đỉnh $I\left(\dfrac{9}{17}; \dfrac{-47}{17}\right)$, vì $a = 17 > 0$ ta có bảng biến thiên: x: $\dfrac{-4}{5}$ → $\dfrac{9}{17}$ → $\dfrac{4}{5}$ y: $\dfrac{682}{25}$ ↘ $\dfrac{-47}{17}$ ↗ $\dfrac{-38}{25}$ Từ BBT ta có kết luận: $\min\limits_{\left[\frac{-4}{5};\frac{4}{5}\right]} A = \dfrac{-94}{17}$ khi $m = \dfrac{9}{17}$; $\max\limits_{\left[\frac{-4}{5};\frac{4}{5}\right]} A = \dfrac{1364}{25}$ khi $m = \dfrac{-4}{5}$.	1,5

3(3.0 điểm)		**3.0 điểm**	
		$cot\,\widehat{AGB}=\dfrac{cos\,\widehat{AGB}}{sin\,\widehat{AGB}}=\dfrac{GA^2+GB^2-AB^2}{2GA.GB.sin\,\widehat{AGB}}=\dfrac{GA^2+GB^2-AB^2}{4S_{\Delta AGB}}=\dfrac{GA^2+GB^2-AB^2}{\frac{4}{3}S}$ Tương tự $cot\,\widehat{AGC}=\dfrac{GA^2+GC^2-AC^2}{\frac{4}{3}S};cot\,\widehat{BGC}=\dfrac{GB^2+GC^2-BC^2}{\frac{4}{3}S};$	1,0
		$cot\,\widehat{AGB}+cot\,\widehat{AGC}+cot\,\widehat{BGC}=\dfrac{2\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)-\left(AB^2+BC^2+AC^2\right)}{\frac{4}{3}S}$ $=\dfrac{2.\frac{4}{9}\left(m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2\right)-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\frac{4}{3}S}$	1,0
		Chứng minh $m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2=\dfrac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$ suy ra $cot\,\widehat{AGB}+cot\,\widehat{AGC}+cot\,\widehat{BGC}=\dfrac{-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4S}$	1,0
4(3.0 điểm)		 Đặt $AB=a\left(a>0\right)$. Tính được $BM=\dfrac{a\sqrt{5}}{2};MK=\dfrac{a\sqrt{5}}{4};BK=\dfrac{5a}{4}$ $\Rightarrow \Delta BMK$ vuông tại M. Từ giả thiết tính được $MK=\sqrt{5}\Rightarrow a=4.$	1
		Gọi $B\left(x_B;2x_B\right)\Rightarrow \overrightarrow{BM}\left(-3-x_B;-2x_B\right);\overrightarrow{MK}\left(1;-\right.$ $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MK}=0\Leftrightarrow x_B=1\Rightarrow B\left(1;2\right).$	0,5
		Gọi $A\left(x_A;y_A\right).$ Có: $\begin{cases}AB^2=16\\AM^2=4\\AK^2=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x_A-1\right)^2+\left(y_A-2\right)^2=16\\\left(x_A+3\right)^2+y_A{}^2=4\\\left(x_A+2\right)^2+\left(y_A+2\right)^2=17\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-8x_A-4y_A=16\\2x_A-4y_A=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=-3\\y_A=2\end{cases}$	0,5

		Thay tọa độ $A(-3;2)$ vào hệ phương trình thỏa mãn. Vậy $A(-3;2)$	
		Có $M(-3;0)$ là trung điểm AD nên $D(-3;-2)$; $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ tìm được $C(1;-2)$. Vậy $A(-3;2);B(1;2);C(1;-2);D(-3;-2)$.	1,0
5(2.0 điểm)		$\begin{cases} x(y^2+1-x)+y(2x-y-1)=x^2y & (1) \\ y^2-3x-4=\sqrt{x-1}(x^2-4y-2) & (2) \end{cases}$ Điều kiện xác định: $x\ge 1; y\in\mathbb{R}$. Ta có: $(1)\Leftrightarrow xy^2-x^2y+x-y-(x^2-2xy+y^2)=0$ $\Leftrightarrow (x-y)(1-xy-x+y)=0\Leftrightarrow (x-y)(1-x)(1+y)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ x=y \end{array}\right.$	0,5
		TH1: $x=1$ thay vào phương trình (2): $y^2-7=0\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{7}$ Hệ phương trình có nghiệm $(0;\sqrt{7});(0;-\sqrt{7})$.	0,25
		TH2: $y=-1$ thay vào phương trình $(2)\Rightarrow -3x-3=\sqrt{x-1}(x^2+2)$ vô nghiệm do $x\ge 1$ vế phải âm; vế trái dương	0,25
		TH3: $x=y$ khi đó phương trình (2) trở thành $x^2-3x-4=\sqrt{x-1}(x^2-4x-2)(*)$ Do $x^2-4x-2=0\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{6}$ không là nghiệm của phương trình $(*)$ $(*)\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x-2}=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x-2}-1=\sqrt{x-1}-1$ $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x^2-4x-2}=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-4x-2=\sqrt{x-1}+1(**) \end{array}\right.$	0,5
		Với $x=2\Rightarrow y=2$, nghiệm của hệ phương trình là $(2;2)$. $(**)\Leftrightarrow x^2-4x-5=\sqrt{x-1}-2\Leftrightarrow (x-5)(x+1)=\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}+2}$ $\Leftrightarrow (x-5)\left(x+1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}\right)=0\Leftrightarrow (x-5)\left(x+\dfrac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+2}\right)=0\Leftrightarrow x=5(\text{do } x\ge 1$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $(1;\sqrt{7});(1;-\sqrt{7});(2;2);(5;5)$	0,5

6 **(2.0 điểm)**		**2,0 điểm** $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+xz+x^2}\ge\sqrt{3}.$ Ta có $\sqrt{x^2+xy+y^2}=\sqrt{\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x-y)^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$ do $x>0;y>0$ Tương tự : $\sqrt{y^2+yz+z^2}=\sqrt{\frac{3}{4}(z+y)^2+\frac{1}{4}(z-y)^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}(z+y)$ $\sqrt{x^2+xz+z^2}=\sqrt{\frac{3}{4}(x+z)^2+\frac{1}{4}(x-z)^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}(x+z)$ $\Rightarrow\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}(2x+2y+2z)$ Hay $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\ge\sqrt{3}(x+y+z)$	1,0
		Mặt khác $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge3\sqrt[3]{xyz}.3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$ $\Rightarrow x+y+z\ge\frac{9}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\ge1\left(\text{do } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le9\right).$ Hay $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+xz+x^2}\ge\sqrt{3}$ (điều phải chứng minh) Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}.$	1,0

……**Hết**…….