ĐỀ THI OLYMPIC CÁC TRƯỜNG THPT TÂY NAM NĂM HỌC 2017 - 2018
Môn: Toán – Lớp 11
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1 (4,0 *điểm*). Cho phương trình $2\cos 2x + 2(m+1)\sin x + m = 0 (1)$

a. Giải phương trình (1) khi m=1.

b. Tìm *m* để phương trình (1) có nghiệm thuộc $[0;\pi]$.

Câu 2 (4,0 *điểm*). a. Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm *n* để $a_{3n-3} = 26n$.

b. Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Lấy ngẫu nhiên 3 thẻ và nhân các số trên 3 thẻ lại. Tính xác suất để được kết quả là một số chia hết cho 4.

Câu 3 (4,0 *điểm*). a. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2+3)\sqrt[3]{1-5x}-3}{x} & khi\, x<0 \\ x^2+ax+a^2+a-7 & khi\, x \ge 0 \end{cases}$

Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

b. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với $(d): 3x+y-1=0$.

Câu 4 (6,0 điểm): Hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật, $AB = a; AD = 2a$. Góc giữa *SC* và mặt phẳng (*ABCD*) bằng 45^0; *SA* vuông góc mặt phẳng *(ABCD)*; *E* là trung điểm của *BC*.

a. Chứng minh các mặt bên của hình chóp *S.ABED* là các tam giác vuông.
b. Mặt phẳng *(P)* qua *A* vuông góc với *SD* cắt hình chóp theo một thiết diện. Tính diện tích thiết diện đó theo a.
c. Gọi α,β,γ lần lượt là góc giữa $SA; AB; AD$ với mặt phẳng (*SBD*).
Chứng minh rằng $\tan^2\alpha.\tan^2\beta + \tan^2\alpha.\tan^2\gamma + \tan^2\gamma.\tan^2\beta + 2\tan^2\alpha.\tan^2\beta.\tan^2\gamma = 1$.

<u>Bài 5(2,0 điểm):</u> Cho tam giác *ABC* có độ dài các cạnh $BC = a; AC = b; AB = c$ lần lượt lập thành cấp số cộng công sai *d*. Chứng minh rằng $d = \dfrac{3r}{2}\left(\tan\dfrac{C}{2} - \tan\dfrac{A}{2}\right)$, biết *r* là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác *ABC*.

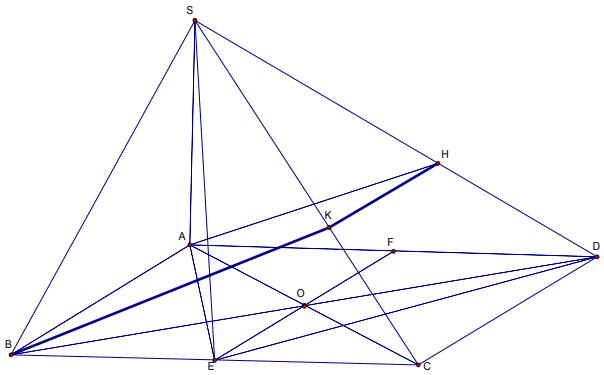
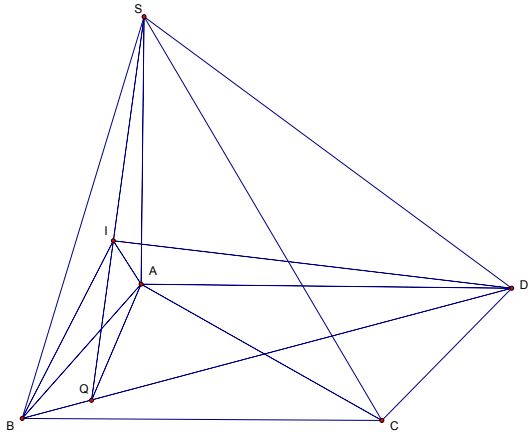
Hết.

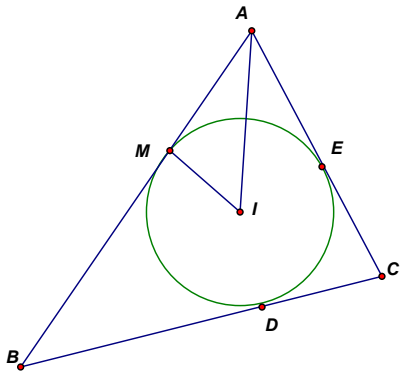
ĐÁP ÁN ĐỀ THI OLYMPIC KHU VỰC TÂY NAM NĂM HỌC 2017-2018

LỚP 11

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1 (4,0 điểm)	**a (3,0 điểm)**	$2\cos 2x+2(m+1)\sin x+m=0(1)$ TXĐ: $\mathbb{R}$ $(1)\Leftrightarrow 4\sin^2 x-2(m+1)\sin x-m-2=0$ Đặt $t=\sin x\Rightarrow t\in[-1;1]$. Phương trình trở thành: $4t^2-2(m+1)t-m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-1}{2}\\ t=\dfrac{m+2}{2}\end{array}\right.$ a. Khi $m=1$ có $t=\dfrac{m+2}{2}=\dfrac{3}{2}\notin[-1;1]$(loại) $t=\dfrac{-1}{2}\Leftrightarrow\sin x=\dfrac{-1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$. Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$	3,0
	b (1,0 điểm)	Với m bất kỳ, phương trình $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-1}{2}\\ t=\dfrac{m+2}{2}\end{array}\right.$ $t=\dfrac{-1}{2}\Leftrightarrow\sin x=\dfrac{-1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$ không có nghiệm trên $[0;\pi]$ Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\dfrac{m+2}{2}\in[0;1]\Leftrightarrow -2\le m\le 0$ Vậy $-2\le m\le 0$.	1,0
Câu 2 (4,0 điểm)	**a (2,0 điểm)**	Ta có $(x^2+1)^n(x+2)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^2)^{n-k}\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^{n-i}2^i=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_n^kC_n^i x^{3n-2k-i}2^i$ Cần có x^{3n-3} suy ra $\begin{cases}3n-2k-i=3n-3\\ k,i\in\mathbb{N};n\in\mathbb{N}^*\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2k+i=3\\ k,i\in\mathbb{N};n\in\mathbb{N}^*\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=0\\ i=3\end{cases}\\ \begin{cases}k=1\\ i=1\end{cases}\end{array}\right.$	1,0
	b. (2,0 điểm)	$a_{3n-3}=C_n^0C_n^3 2^3+C_n^1C_n^1 2$ $a_{3n-3}=26n\Leftrightarrow 2n^2-3n-35=0\Rightarrow n=5$. Vậy $n=5$.	1,0

		Ta có $n(\Omega)=C_{30}^3$ Gọi A là biến cố " Tích của 3 số trên 3 thẻ là số chia hết cho 4" Ta chia 30 thẻ thành các tập hợp: 15 thẻ ghi số lẻ, 8 thẻ ghi số chẵn không chia hết cho 4, 7 thẻ ghi số chia hết cho 4. Các trường hợp xảy ra: TH1: Cả 3 thẻ ghi số chia hết cho 4: Số cách lấy là C_7^3 TH2: 2 thẻ ghi số chia hết cho 4: Số cách lấy là $C_7^2C_{23}^1$ TH3: 1 thẻ ghi số chia hết cho 4: Số cách lấy là $C_7^1C_{23}^2$ TH4: 2 thẻ ghi số chẵn không chia hết cho 4, 1 thẻ ghi số lẻ: Số cách lấy là $C_8^2C_{15}^1$ TH5: Cả 3 thẻ ghi số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4: Số cách lấy là C_8^3 Suy ra $n(A)=C_7^3+C_7^2C_{23}^1+C_7^1C_{23}^2+C_8^2C_{15}^1+C_8^3=2765$ Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{79}{116}$.	0,5 1,5
Câu 3 (4,0 điểm)	**a (2,0 điểm)**	Tập xác định: $\mathbb{R}$ +) $x<0$ $\quad f(x)=\dfrac{(x^2+3)\sqrt[3]{1-5x}-3}{x}$ $\Rightarrow$ hàm số liên tục trên $(-\infty;0)$. +) $x>0$ $\quad f(x)=x^2+ax+a^2+a-7$ $\Rightarrow$ hàm số liên tục trên $(0;+\infty)$. Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.	0,5
		Tại $x=0$: Có $f(0)=a^2+a-7$. +) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+ax+a^2+a-7)=a^2+a-7$.	0,5
		+) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(x^2+3)\sqrt[3]{1-5x}-3}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\left[x\sqrt[3]{1-5x}+\dfrac{3(\sqrt[3]{1-5x}-1)}{x}\right]$ $=\lim\limits_{x\to0^-}\left[x\sqrt[3]{1-5x}+\dfrac{-15}{\sqrt[3]{(1-5x)^2}+\sqrt[3]{1-5x}+1}\right]=-5$	0,5
		Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=0$ $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)\Leftrightarrow a^2+a-7=-5\Leftrightarrow a^2+a-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-2\end{array}\right.$ KL: Vậy $\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-2\end{array}\right.$	0,5
	b (2,0 điểm)	$D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. $\qquad y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Vì tiếp tuyến vuông góc với $(d): 3x+y-1=0\Rightarrow f'(x_0)=\dfrac{1}{3}$ hay $\dfrac{3}{(x_0+1)^2}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow(x_0+1)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=-4\end{array}\right.$	1,0

		Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 1$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.	0,5
		Với $x_0 = -4 \Rightarrow y_0 = 3$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$. Kết luận: Vậy có 2 phương trình tiếp tuyến thỏa mãn là $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}; y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$.	0,5
Câu 4 (6 điểm)	**a (2,0 điểm)**	 $SA \perp (ABCD)$ $\Rightarrow SA \perp AB;\ SA \perp AD$ Hay $\triangle SAB; \triangle SAD$ vuông tại A	0,5
		Ta có: $\begin{cases} SA \perp BE \\ AB \perp BE \\ SA \cap AB = \{A\} \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAB)$ $\Rightarrow BE \perp SB$ hay $\triangle SBE$ vuông tại B	0,5
		Gọi F là trung điểm của AD. Ta có tứ giác ABEF là hình vuông nên $FE = FA = FD = a \Rightarrow \Delta AED$ vuông tại E. Chứng minh $DE \perp (SAE) \Rightarrow DE \perp SE$ hay ΔSDE vuông tại E.	1,0
	b (2,0 điểm)	Ta có $AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SD$. Từ A hạ $AH \perp SD$ tại H $\Rightarrow (P)$ là mp(ABH). c/m $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow CD // (P)$ và $AH \perp (SCD)$ tại H. Ta có $(P) \cap (SCD)$ là đường thẳng $HK // CD$; $K \in SC$. Vậy thiết diện phải tìm là hình thang vuông $ABKH$ vuông tại A và H.	1,0
		Tính AH: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{9}{20a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$. Có $\widehat{SCA} = 45^0 \Rightarrow \Delta SCA$ vuông cân tại A $\Rightarrow SA = SC = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$. Tính HK: Có $SH.SD = SA^2 \Rightarrow \frac{SH}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{5}{9} = \frac{HK}{CD} \Rightarrow HK = \frac{5a}{9}$	0,5
		Tính diện tích thiết diện $ABKH$ là: $s_{ABKH} = \frac{(HK + AB).AH}{2} = \frac{14a^2\sqrt{5}}{27}$.	0,5
	c (2,0 điểm)	 Gọi I là trực tâm tam giác SBD ta có $SI \perp BD; SA \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAI)$ $\Rightarrow AI \perp BD$. Tương tự $AI \perp SB$ suy ra $AI \perp (SBD)$ $\Rightarrow \widehat{ASI} = \alpha; \widehat{ABI} = \beta; \widehat{ADI} = \gamma$ Ta có: $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ $= AI^2\left(\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}\right) = 1$	1,0

		$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$	
		$(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+tan^2\alpha} + \dfrac{1}{1+tan^2\beta} + \dfrac{1}{1+tan^2\gamma} = 2$ $\Leftrightarrow tan^2\alpha.tan^2\beta + tan^2\alpha.tan^2\gamma + tan^2\gamma.tan^2\beta + 2tan^2\alpha.tan^2\beta.tan^2\gamma = 1.$	1,0
Câu 5 (2 điểm)		**Chứng minh:** $d = \dfrac{3r}{2}\left(tan\dfrac{C}{2} - tan\dfrac{A}{2}\right)$, S là diện tích tam giác ABC Ta có $d = \dfrac{c-a}{2} = \dfrac{(p-a)-(p-c)}{2}$. Ta có:  $tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{IM}{AM} = \dfrac{r}{AM}$; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ $AM = AE; BM = BD; CD = CE \Rightarrow 2(AM + BD + CD) = 2p \Rightarrow AM + a = p$ $\Rightarrow AM = p - a$. Vậy $tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{p-a}$, tương tự $tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{r}{p-b}; tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{p-c}$	1,0
		Ta có $tan\dfrac{A}{2}.tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{r^2}{(p-a)(p-c)} = \dfrac{\dfrac{S^2}{p^2}}{\dfrac{S^2}{(p-b)p}} = \dfrac{p-b}{p} = \dfrac{a+c-b}{a+b+c} = \dfrac{1}{3}$	0,5
		$\Rightarrow d = \dfrac{r}{2}\left(\dfrac{1}{tan\dfrac{A}{2}} - \dfrac{1}{tan\dfrac{C}{2}}\right) = \dfrac{r}{2}\dfrac{tan\dfrac{C}{2} - tan\dfrac{A}{2}}{tan\dfrac{A}{2}.tan\dfrac{C}{2}} = 3r.\dfrac{\left(tan\dfrac{C}{2} - tan\dfrac{A}{2}\right)}{2}$ (đpcm)	0,5

HẾT

****) Mọi cách giải khác nếu đúng kết quả và lập luận chặt chẽ đều cho điểm tương đương.***